De la Pureté locale à la décomposition

Fouad El Zein, Dung Tráng Lê

Comptes Rendus Mathématique, Géométrie Algébrique

De la Pureté locale à la décomposition

Fouad El Zein [a], Dũng Tráng Lê [b]

[a] *Institut de Mathématiques de Jussieu, Paris, France*
[b] *Université d'Aix-Marseille LATP, UMR-CNRS 7353 39, rue Joliot-Curie F-13453 Marseille Cedex 13, France*

Reçu le ; accepté après révision le +++++

Note présentée par Claire Voisin

Résumé

Le théorème de décomposition se déduit de la pureté locale.

Abstract

From Local purity to Decomposition. The decomposition theorem is deduced from local purity.

1. Introduction

Cette note fait suite à [6] où l'on déduit un théorème de pureté locale en un point en caractéristique zéro, similaire au théorème de pureté locale de Deligne-Gabber de [5], à partir du théorème de décomposition sur le complémentaire d'un point dans une boule centrée en ce point. Ici nous montrons comment ce théorème de pureté locale en un point permet d'étendre le théorème de décomposition au centre de la boule, ce qui donne une preuve par récurrence simultanée du théorème de pureté locale et du théorème de décomposition.

Nous reprenons les notations de [6]. Soit $f : X \to V$ un morphisme projectif de variétés algébriques complexes, $\tilde{\mathcal{L}}$ une variation de structures de Hodge (VSH) polarisée sur un ouvert Ω lisse de X de dimension m, $j : \Omega \to X$, $\mathcal{L} := \tilde{\mathcal{L}}[m]$ le complexe réduit à $\tilde{\mathcal{L}}$ en degré $-m$, et $j_{!*}\mathcal{L}$ l'extension intermédiaire de $\mathcal{L}$. Soit v un point de V; il s'agit à présent d'étendre le résultat de décomposition de $Rf_* j_{!*}\mathcal{L}$ sur $V - v$ au point v à partir du résultat sur la pureté locale en ce point.

En réalité, il y a deux décompositions de nature bien distinctes. L'une consiste à décomposer une cohomologie perverse ${}^p\mathcal{H}^i(Rf_*(j_{!*}\mathcal{L}))$ en une somme directe canonique d'extensions intermédiaires qui utilise la théorie de Hodge.

Email addresses: fouad.elzein@imj-prg.fr (Fouad El Zein), ledt@ictp.it (Dũng Tráng Lê).

L'autre consiste à décomposer le complexe en une somme directe de ses propres cohomologies perverses décalées en degré (voir [3]). Ayant choisi d'utiliser des complexes logarithmiques, on s'intéresse particulièrement à des fibrations par des DCN sur les strates au sens de ([6], Définition 3.1), ce qui permet d'utiliser une SHM sur le complémentaire d'un diviseur à croisements normaux (DCN) à chaque pas du raisonnement de récurrence. On peut toujours se réduire à ce cas en transformant la variété X à l'aide d'une désingularisation adaptée à $\mathcal{L}$ et à une stratification de Thom-Whitney de f.

- *Hypothèse de récurrence.* Soit $f : X \to V$ une fibration par des DCN sur les strates d'une stratification de Thom-Whitney $\mathcal{S}$ de f, V_j la réunion des strates de V de dimension $\leq j < n$. Par hypothèse, on suppose que la décomposition s'applique sur l'ouvert $U_j := V - V_j$. *Le pas de récurrence* consiste à étendre la décomposition à U_{j-1} le long de $V_j - V_{j-1}$, ce que l'on fait localement au voisinage de tout point v d'une strate S_j. Par construction, l'image réciproque de la strate S_j est une fibration par des DCN dans X relatifs sur la strate S_j.

- *Morphismes d'intersection.* Il est naturel d'exprimer le résultat en termes de *morphismes d'intersection* I qui sont l'une des révélations de la théorie dans [1] et dont l'importance apparait avec les stratifications. Soit $X_{S_l} := f^{-1}(S_l)$ l'image réciproque d'une strate S_l de dimension $l \leq n$, on pose $i_{X_{S_l}} : X_{S_l} \to X$, $i_{S_l} : S_l \to V$, $f_l : X_{S_l} \to S_l$. Le morphisme d'intersection I_{S_l} définissant les images $\mathcal{L}_l^i$

$$I_{S_l} : Ri^!_{X_{S_l}} j_{!*}\mathcal{L} \to i^*_{X_{S_l}} j_{!*}\mathcal{L}, \quad \mathcal{L}_l^i = \mathrm{Im}[R^{-l+i} f_{l*}(Ri^!_{X_{S_l}} j_{!*}\mathcal{L}) \xrightarrow{I_{S_l}} R^{-l+i} f_{l*}(i^*_{X_{S_l}} j_{!*}\mathcal{L})], \tag{1}$$

est induit sur S_l par le composé du morphisme $i_{X_{S_l}*} Ri^!_{X_{S_l}} j_{!*}\mathcal{L} \to j_{!*}\mathcal{L}$ et du morphisme de restriction $j_{!*}\mathcal{L} \to i_{X_{S_l}*} i^*_{X_{S_l}} j_{!*}\mathcal{L}$. Sous l'hypothèse de fibration sur les strates de V, les images $\mathcal{L}_l^i$ de I_{S_l} sont des systèmes locaux sur les différentes strates. Ces $\mathcal{L}_l^i$ sont en fait des VSH de poids $a+i-l$ si $\mathcal{L}$ est de poids a, car $\mathcal{L}_l^i$ est l'image d'une variation de SHM de poids $\omega \geq a+i-l$ dans une variation de SHM de poids $\omega \leq a+i-l$ et de plus le tout est calculé avec des complexes logarithmiques en X_{S_l} DCN relatifs sur S_l.

- *Lefschetz difficile.* Il faut démontrer par la même récurrence, l'isomorphisme de Lefschetz pour le cup-produit itéré avec la classe η d'une section hyperplane sur la cohomologie perverse. Nous le vérifions sur les termes de la formule explicite (1).

Théorème 1.1 (Décomposition de la cohomologie perverse par récurrence)
Sous les conditions de l'hypothèse de récurrence, soit n la dimension de V, $\mathcal{S}$ une stratification de Thom-Whitney de f, $i_j : V_j \to V$ la réunion des strates de dimension $\leq j$ pour tout $j \leq n$, et $k_j : (V - V_j) \to V$.

i) Supposons que la cohomologie perverse de $K = Rf_* j_{!*}\mathcal{L}$ en tout degré i, se décompose sur l'ouvert $V - V_j$ en une somme directe d'extensions intermédiaires de VSH $\mathcal{L}_l^i$ (1) sur les strates S_l de $V_l^* := V_l - V_{l-1}$ pour tout $l > j$: ${}^p\mathcal{H}^i(K)_{|V-V_j} \simeq \oplus_{j<l\leq n}^{S_l\subset V_l^*}\ k_j^* i_{S_l !*}\mathcal{L}_l^i[l]$.
Alors la suite exacte longue de cohomologie perverse ${}^p\mathcal{H}^i((i_j)_* R(i_j)^! K) \xrightarrow{{}^p\alpha_i} {}^p\mathcal{H}^i(K) \xrightarrow{{}^p\rho_i} {}^p\mathcal{H}^i(Rk_{j*} K_{|V-V_j}) \xrightarrow{{}^p\delta_i}$ donne lieu à une suite exacte courte : $0 \to Im\,{}^p\alpha_i \to {}^p\mathcal{H}^i(K) \xrightarrow{{}^p\rho_i} Im\,{}^p\rho_i \to 0$ de faisceaux pervers, qui est scindée sur $V - V_{j-1}$ et qui se décompose :

$$Im\,{}^p\rho_i = (k_j)_{!*} k_j^*\ {}^p\mathcal{H}^i(K) \simeq \oplus_{j<l\leq n}^{S_l\subset V_l^*} i_{S_l !*}\mathcal{L}_l^i[l],\ \ et\ \ Im\,{}^p\alpha_i = ker\,{}^p\rho_i \simeq \oplus_{S_j\subset V_j^*} i_{S_j !*}\mathcal{L}_j^i$$

en termes de $\mathcal{L}_l^i$ pour $l > j$ à droite et $\mathcal{L}_j^i$ à gauche.

ii) Si on suppose de même par récurrence le théorème de Lefschetz difficile sur l'ouvert $V - V_j$: $\eta^i : {}^p\mathcal{H}^{-i}(Rf_* j_{!*}\mathcal{L})_{|V-V_j} \xrightarrow{\sim} {}^p\mathcal{H}^i(Rf_* j_{!*}\mathcal{L})_{|V-V_j}$, alors l'isomorphisme défini par η^i s'étend au-dessus de $V - V_{j-1}$.

Corollaire 1.2 *i) Le cup-product avec la classe d'une section hyperplane définit des isomorphismes η^i : ${}^p\mathcal{H}^{-i}(K) \to {}^p\mathcal{H}^i(K)$ pour $i \geq 0$, et par conséquent le complexe K se décompose dans la catégorie dérivée*

en somme directe de ses cohomologies perverses, qui se décomposent à leur tour en somme directe d'extensions intermédiaires $K = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} {}^p\mathcal{H}^i(K)[-i]$ *et* ${}^p\mathcal{H}^i(K) \simeq \oplus_{0\leq l\leq n}^{S_l\subset V_l^*} i_{S_l!*}\mathcal{L}_l^i[l]$.
ii) Le théorème de décomposition se déduit pour tout morphisme projectif à partir du cas d'un morphisme fibré par des DCN sur les strates.

L'ensemble de ces résultats donne une nouvelle démonstration du théorème de décomposition à l'aide d'une récurrence sur la dimension décroissante des strates d'une stratification de Thom-Whitney $\mathcal{S}$ convenable de la base V et du morphisme f reflétant ainsi une propriété topologique du morphisme algébrique. La preuve n'utilise pas la théorie des cycles évanescents et diffère des preuves actuelles que nous citons en référence [1], [8].

2. Preuve de la décomposition de la cohomologie perverse et du complexe (théorème 1.1)

- On *débute la récurrence* sur l'ouvert U formé par la réunion des grandes strates lisses de V de dimension n tel que la restriction de f au-dessus de U soit lisse et propre et que le complémentaire de U dans V soit égal à la réunion V_{n-1} des strates de dimension $n-1$ d'image réciproque $X_{V_{n-1}}$ un DCN dans X, le complémentaire Y de l'ouvert de définition Ω du système local $\mathcal{L}$ soit un DCN dans X, que $X_{V_{n-1}} \cup Y$ soit aussi un DCN, et que $Y_U := Y \cap f^{-1}(U)$ soit un DCN dans $f^{-1}(U)$ relatif au-dessus de U et horizontal noté aussi Y_h (ne contient pas de fibre de f). Alors la famille de cohomologie d'intersection des fibres forme une VSH sur U. Dans ce cas, les faisceaux image-directes supérieures $R^i f_* j_{!*}\mathcal{L}$ coincident avec les cohomologies perverses : ${}^p\mathcal{H}^i(Rf_*(j_{!*}\mathcal{L})) = \mathcal{H}^i(Rf_*(j_{!*}\mathcal{L}))$, le théorème de Lefschetz difficile s'applique, et par conséquent les résultats de [3] aussi, d'où la décomposition sur U.

- *Preuve du pas de récurrence pour une fibration par des DCN sur les strates.* La situation est donc celle d'un morphisme projectif de variétés algébriques complexes $f : X \to V$ où X est lisse et d'une VSH polarisée définie sur un système local $\tilde{\mathcal{L}}$ sur le complémentaire de Y un DCN dans X. Un sous-espace fermé V_i est la réunion des strates de dimension $\leq i$ d'ne stratification $\mathcal{S}$ de V pour $i \in [0, n]$ et V_{n-1} contient le lieu singulier de V. Par construction, l'espace $X_{V_i} := f^{-1}(V_i)$ est un DCN dans X et pour chaque strate S_l de dimension l, $X_{S_l} = f^{-1}(S_l)$ est un DCN relatif.

La restriction de f à $X - X_{V_{n-1}}$ est lisse sur $V - V_{n-1}$, et de plus $Z = X_{V_{n-1}} \cup Y_h$ est un DCN union de $X_{V_{n-1}}$ avec un DCN horizontal Y_h tel que la restriction de f à Y_h induise au-dessus de l'union des grandes strates $U := V - V_{n-1}$ un DCN relatif. Dans ce cas $\mathcal{L}$ est lisse sur $X - Z$ et la stratification est dite adaptée à f et $\mathcal{L}$. L'espace Z contient donc les singularités de $\mathcal{L}$ et de f de sorte que l'on puisse utiliser des complexes logarithmiques pour la théorie de Hodge à coefficients dans $\mathcal{L}$ sur X ([2], 8.3.3, theorem 8.3.14) et [7]. Nous utilisons les notations suivantes :

$(X - X_{V_l}) \xrightarrow{j_l} X \xleftarrow{i'_l} X_{V_l}$, $(V - V_l) \xrightarrow{k_l} V \xleftarrow{i_l} V_l$, $f : X \to V$ et $f_l : X_l \to V_l$.

Si v est un point dans V_0, on écrit $i_{X_v} : X_v = f^{-1}(v) \to X$, $k_v : (V - \{v\}) \to V$, $i_v : \{v\} \to V$ et $j_v : (X - X_v) \to X$, enfin $V_l^* := V_l - V_{l-1}$ désigne la réunion (éventuellement vide) des strates de dimension l.

- *Réduction au cas d'une strate de dimension zéro.* D'après la définition de la fibration par DCN relatifs ([6], Définition 3.1), tout point v d'une strate S_l admet un voisinage B_v muni d'une projection $g : B_v \to D^l$ telle que son composé $g \circ (f_{|X_{B_v}})$ avec la restriction de f, soit lisse et que $X_{B_v \cap S_l}$ soit un DCN dans X_{B_v} relatif sur $B_v \cap S_l$. Pour tout point t de $B_v \cap S_l$, la fibre de g au-dessus du point $g(t) \in D^l$ est une section normale $\mathcal{N}_t$ de S_l au point t d'image réciproque lisse $X_{\mathcal{N}_t}$ contenant le DCN X_t. Les données sur X se réduisent à des données correspondantes sur $X_{\mathcal{N}_t}$. En particulier, le complexe logarithmique à coefficients et ses filtrations W et F sur X ont une bonne réduction en un complexe logarithmique sur $X_{\mathcal{N}_v}$ muni des filtrations W et F construites directement sur $X_{\mathcal{N}_v}$, ce qui nous ramène au cas d'une strate de dimension zéro d'une stratification sur $\mathcal{N}_v$. Auquel cas, on dispose du théorème de pureté locale au point v de la section normale $\mathcal{N}_v$ à S_l.

On écrit $i_{S_l} : S_l \to \overline{S}_l$ pour chaque strate et de même avec abus de notation $i_{S_l} : S_l \to V$. On va montrer que la pureté locale aux points v de la réunion V_0 des strates de dimension zéro, permet d'étendre la décomposition de $V - V_0$ à V. La preuve étant locale, on peut supposer V projective et V_0 réduit à un point v. On écrit alors i_v, k_v pour les immersions au lieu de i_0, k_0.

La suite exacte du théorème est associée au triangle sur V : $i_{v*}Ri_v^!(K) \xrightarrow{\alpha} K \xrightarrow{\rho} Rk_{v*}K_{|V-\{v\}} \xrightarrow{[1]}$, et de plus on a : ${}^p\mathcal{H}^i(i_{v*}Ri_v^!K) \simeq i_{v*}H^i(Ri_v^!K)$.

Afin de calculer successivement : $Im\,{}^p\rho_i$, $Im\,{}^p\alpha_i$ et prouver le scindage dans ${}^p\mathcal{H}^i(K)$, il nous est utile de signaler d'abord le calcul de cohomologie perverse de $Rk_{v*}K_{|V-\{v\}}$ sous l'hypothèse de la décomposition (théorème 1.1, i) sur $V - v$:

Lemme 2.1 *Soit $K' := \oplus_j (i_{S_l})_{!*}\mathcal{L}_l^j[l-j]$ somme directe de systèmes locaux sur une strate S_l. On a :*
i) Une suite exacte courte pour tout i

$$0 \to (i_{S_l})_{!*}(\mathcal{L}_l^i[l]) \to {}^p\mathcal{H}^i(Rk_{v*}k_v^*K') \xrightarrow{h} \oplus_{j\leq i}R^ik_{v*}(k_v^*(i_{S_l})_{!*}\mathcal{L}_l^j[l-j]) \to 0 \tag{2}$$

où le dernier terme est un faisceau en degré zéro de support v.
ii) $H^0(i_v^*{}^p\mathcal{H}^i(Rk_{v*}k_v^*K')) \simeq \oplus_{j\leq i}R^ik_{v*}(k_v^*(i_{S_l})_{!*}\mathcal{L}_l^j[l-j]) \simeq R^ik_{v*}(k_v^*({}^p\tau_{\leq i}K'))$
iii) En particulier un morphisme φ à valeur dans ${}^p\mathcal{H}^i(Rk_{v*}k_v^*K')$ se factorise par $(i_{S_l})_{!*}(\mathcal{L}_l^i[l])$ si $h\circ\varphi = 0$.

Suite de la preuve du théorème. On suppose $j = 0$ et $V_0 = \{v\}$ un point.

1) *Calcul de l'image de ${}^p\rho_i$.* Par définition du foncteur extension intermédiaire ([1], 1.4.22, p.54), on a :

$$(k_v)_{!*}\,{}^p\mathcal{H}^i(k_v^*K) = Im\,({}^p\mathcal{H}^i(R(k_v)_!k_v^*K) \xrightarrow{{}^p\gamma_i} {}^p\mathcal{H}^i(R(k_v)_*k_v^*K))$$

D'après l'hypothèse du théorème (1.1, i), c'est aussi égal à $\oplus_{0<l\leq n}^{S_l\subset V_l^*}(i_{S_l})_{!*}\mathcal{L}_l^i[l]$ où $V_l^* = V_l - V_{l-1}$ et $\dim.S_l = l$. Le morphisme ${}^p\gamma_i$ se factorise en ${}^p\gamma_i = {}^p\rho_i \circ {}^p\beta_i$: ${}^p\mathcal{H}^i(R(k_v)_!k_v^*K) \xrightarrow{{}^p\beta_i} {}^p\mathcal{H}^i(K) \xrightarrow{{}^p\rho_i} {}^p\mathcal{H}^i(R(k_v)_*k_v^*K)$, on en déduit : $Im\,{}^p\rho_i \supset \oplus_{0<l\leq n}^{S_l\in V_l^*}(i_{S_l})_{!*}\mathcal{L}_l^i[l] = Im\,{}^p\gamma_i$.

Pour obtenir l'égalité $Im\,{}^p\rho_i = Im\,{}^p\gamma_i$, il suffit de prouver, d'après le lemme (2.1, iii), que le morphisme ${}^p\rho_i^0$, induit par ${}^p\rho_i$ sur la cohomologie en degré zéro, s'annule :
$H^0(i_v^*\ {}^p\mathcal{H}^i(K)) \xrightarrow{{}^p\rho_i^0} H^0(i_v^*\ {}^p\mathcal{H}^i(Rk_{v*}k_v^*K)) \simeq \oplus_{0<l\leq n, j\leq i}^{S_l\in V_l^*}R^ik_{v*}(k_v^*i_{S_l\,!*}\mathcal{L}_l^j[l-j])$.

- *Interprétation du morphisme ${}^p\rho_i^0$.* On considère de petits voisinages B_v de v et B_{X_v} de X_v et on interprète le morphisme ${}^p\rho_i^0$ comme un morphisme $\mathbb{H}^0(B_v,\ {}^p\mathcal{H}^i(K)) \to \mathbb{H}^0(B_v - v,\ {}^p\mathcal{H}^i(K)) \simeq Gr_i^{{}^p\tau}\mathbb{H}^i(B_{X_v} - X_v, j_{!*}\mathcal{L})$. En effet : $\mathbb{H}^i(B_v,\ {}^p\tau_{\leq i}K) \simeq \mathbb{H}^i(B_v,\ {}^p\mathcal{H}^i(K)[-i])$ car $\mathbb{H}^i(B_v,\ {}^p\tau_{<i}K) = H^i(i_v^*({}^p\tau_{<i}K)) = 0$ et $\mathbb{H}^{i+1}(B_v,\ {}^p\tau_{<i}K) = H^{i+1}(i_v^*({}^p\tau_{<i}K)) = 0$, et par conséquent ${}^p\rho_i^0$ se factorise comme suit :
$\mathbb{H}^i(B_v,\ {}^p\tau_{\leq i}K) \to \mathbb{H}^i(B_v, K) = \mathbb{H}^i(X_v, j_{!*}\mathcal{L}) \to \mathbb{H}^i(B_{X_v} - X_v, j_{!*}\mathcal{L})$.

Si $\mathcal{L}$ est une VSH polarisée de poids a, l'espace $\mathbb{H}^i(X_v, j_{!*}\mathcal{L})$ est de poids $\omega \leq a + i$ alors qu'à droite le poids est $\omega > a + i$ d'après le résultat sur la pureté locale en v, donc ${}^p\rho_i^0 = 0$.

2) *L'isomorphisme $Im\,{}^p\alpha_i \simeq i_{v*}\mathcal{L}_0^i$.* Le morphisme de connexion ${}^p\mathcal{H}^{i-1}(Rk_{v*}K_{|V-\{v\}}) \xrightarrow{{}^p\delta_{i-1}} \mathbb{H}_v^i(V, K)$ s'annule sur l'image de ${}^p\rho_{i-1}$ et par conséquent, d'après le lemme précédent (2.1, i), son image est égale à celle de l'espace vectoriel $R^{i-1}k_{v*}k_v^*({}^p\tau_{\leq i-1}K)$: $R^{i-1}k_{v*}k_v^*({}^p\tau_{\leq i-1}K) \xrightarrow{{}^p\delta_{i-1}} {}^p\mathcal{H}^i(i_v^!K) = \mathbb{H}_v^i(V, K) \simeq \mathbb{H}_{X_v}^i(X, j_{!*}\mathcal{L})$ et l'on a $Im\,{}^p\alpha_i \simeq \mathbb{H}_v^i(V, K)/Im^p\delta_{i-1}$. Par ailleurs, rappelons que $\mathcal{L}_0^i$ est l' image du morphisme d'intersection I_v^i en degré i dans le diagramme suivant :
$H^{i-1}(i_v^*Rk_{v*}K_{|V-\{v\}}) \xrightarrow{\delta_{i-1}} \mathbb{H}_v^i(V, K) \xrightarrow{I_v^i} H^i(i_v^*K) \xrightarrow{\rho_i} H^i(i_v^*Rk_{v*}K_{|V-\{v\}})$

et l'on a $Im\, I^i_v \simeq \mathbb{H}^i_v(V,K)/Im\,\delta_{i-1}$. Il suffit donc de prouver : $Im\,{}^p\delta_{i-1} = Im\,\delta_{i-1}$. Vu que la décomposition s'applique par récurrence sur $V-\{v\}$, on trouve :
${}^p\delta_{i-1}(R^{i-1}k_{v*}k^*_v({}^p\tau_{\leq i-1}K)) \simeq \delta_{i-1}({}^p\tau_{\leq i-1}\mathbb{H}^{i-1}(B_{X_v}-X_v, j_{!*}\mathcal{L}))$. Alors que l'on veut l'égalité avec toute l'image $\delta_{i-1}(\mathbb{H}^{i-1}(B_{X_v}-X_v, j_{!*}\mathcal{L}))$, ce qui découle de la pureté locale : en effet, le quotient $\mathbb{H}^{i-1}(B_{X_v}-X_v, j_{!*}\mathcal{L}))/{}^p\tau_{\leq i-1}$ est de poids $\omega < a+i$ et le poids de $\mathbb{H}^i_{X_v}(X, j_{!*}\mathcal{L})$ est $\omega \geq a+i$ d'où les images de ${}^p\delta_{i-1}$ et δ_{i-1} sont égaux dans $\mathbb{H}^i_{X_v}(X, j_{!*}\mathcal{L})$ de poids $\omega \geq a+i$. Vu que $Im\,{}^p\alpha_i = ker\ {}^p\rho_i$, on obtient une suite exacte : $0 \to i_{v*}\mathcal{L}^i_0 \to {}^p\mathcal{H}^i(K) \to \oplus^{S_l\subset V^*_l}_{0<l\leq n} i_{S_l\,!*}\mathcal{L}^j_l[l] \to 0$.

3) *Scindage de* ${}^p\mathcal{H}^i(K)$. Considérons la suite exacte : ${}^p\mathcal{H}^i(R(k_v)_!k^*_vK) \overset{{}^p\beta_i}{\to} {}^p\mathcal{H}^i(K) \overset{\theta_i}{\to} H^i(i^*_vK)$. Par définition de $\mathcal{L}^i_0$, le morphisme θ_i induit un isomorphisme sur $i_{v*}\mathcal{L}^i_0 = Im\,{}^p\alpha_i = ker\,{}^p\rho_i$, alors que $\theta_i \circ {}^p\beta_i = 0$, et par conséquent $Im\,{}^p\beta_i \cap \mathcal{L}^i_0 = 0$. On en déduit que ${}^p\rho_i$ induit un isomorphisme : $Im\,{}^p\beta_i \overset{{}^p\rho_i}{\to} Im\,{}^p\rho_i$ et finalement : ${}^p\mathcal{H}^i(K) = Im\,{}^p\beta_i \oplus i_{v*}\mathcal{L}^i_0$

Remarque 1 On retient les relations utiles pour la suite :
$ker I^i_v = ker\ {}^p\alpha_i \simeq Im\ {}^p\delta_{i-1} \simeq \oplus^{S_l\subset V^*_l}_{0<l\leq n, 0\leq i-1-j} R^{i-1-j}k_{v*}(i_{S_l\,!*}\mathcal{L}^j_l[l]) \simeq \oplus^{S_l\subset V^*_l}_{0<l\leq n, 0<i-j} H^{i-j}_v(i_{S_l\,!*}\mathcal{L}^j_l[l])$.

- *Lefschetz difficile.* L'isomorphisme η^i (théorème 1.1, ii) d'après l'hypothèse de récurrence, s'étend aux extensions intermédiaires $(k_v)_{!*}k^*_v\,{}^p\mathcal{H}^i(K)$. On pose $\mathcal{L}^i_v = Im(\mathbb{H}^i_{X_v}(X, j_{!*}\mathcal{L}) \overset{I^i_v}{\to} \mathbb{H}^i(X_v, j_{!*}\mathcal{L}))$ pour l'image du morphisme d'intersection I^i_v au point v. L'assertion (ii) du théorème (1.1) découle de :

Lemme 2.2 *i) La VSH : $\mathcal{L}^{-i}_j$ sur une strate $S_j \subset V^*_j$ est duale de Poincaré de $\mathcal{L}^i_j$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.*
ii) Le cup-produit itéré avec η induit des isomorphismes $\eta^i : \mathcal{L}^{-i}_j \to \mathcal{L}^i_j$ sur S_j pour $i \geq 0$.

L'assertion i) est claire sur la définition auto-duale du morphisme d'intersection.

ii) On suppose $j=0$ et S_j un point v. Il est intéressant d'*interprétation l'assertion dans le cas classique* où $\tilde{\mathcal{L}}$ est un système local en degré 0 sur X lisse et X_v est lisse aussi. La preuve utilise alors la décomposition de Lefschetz sur X_v. On voit que le résultat ne concerne pas la partie primitive de $\mathbb{H}^{-i}(X_v, \mathcal{L}_{|X_v})$.

Preuve de ii). On va utiliser la remarque (1) précédente. On procède par réduction à une section hyperplane relative lisse H dans X, d'intersection transversale aux *strates* du DCN : $X_v \cup Y$. Soit $i_H : H \to X$ l'immersion. Le cup-produit avec la classe η de H définit un morphisme égal au composé des morphismes $j_{!*}\mathcal{L} \overset{\rho}{\to} i_{H*}i^*_H j_{!*}\mathcal{L} \overset{G}{\to} j_{!*}\mathcal{L}[2]$ qui donnent lieu, par application des foncteurs $Ri^!_{X_v}$ et $i^*_{X_v}$, à un diagramme formé par les deux suites :

$\mathbb{H}^i_{X_v}(X, j_{!*}\mathcal{L}) \overset{\rho^!}{\to} \mathbb{H}^i_{X_v\cap H}(H, j_{!*}\mathcal{L}) \overset{G^!}{\to} \mathbb{H}^{i+2}_{X_v}(X, j_{!*}\mathcal{L}), \mathbb{H}^i(X_v, j_{!*}\mathcal{L}) \overset{\rho^*}{\to} \mathbb{H}^i(X_v\cap H, j_{!*}\mathcal{L}) \overset{G^*}{\to} \mathbb{H}^{i+2}(X_v, j_{!*}\mathcal{L})$

et des morphismes d'intersection I^*_v sur X et $I^*_v(H)$ sur H et I^{i+2}_v de la premiere dans la deuxième. On s'intéresse à l'image de ces morphismes $(I^*_v, I^*_v(H), I^{i+2}_v)$ de la première suite dans la seconde, ce qui donne une suite intermédiaire :

(*) $\qquad \mathcal{L}^i_v \overset{\rho'}{\to} \mathcal{L}(H)^i_v \overset{G'}{\to} \mathcal{L}^{i+2}_v$ avec $\mathcal{L}^i_v = Im\, I^i_v$, $\mathcal{L}(H)^i_v = Im\, I^i_v(H)$, $\mathcal{L}^{i+2}_v = Im\, I^{i+2}_v$

où ρ' (resp. G') est induit par le morphisme ρ^* (resp. G^*).

Lemma 2.1 *i) Les morphismes $\rho^! : \mathbb{H}^i_{X_v}(X, j_{!*}\mathcal{L}) \to \mathbb{H}^i_{X_v\cap H}(H, j_{!*}\mathcal{L})$ sont injectifs pour $i=0$ et des isomorphismes pour $i<0$.*

ii) Les morphismes $\rho^* : \mathbb{H}^i(X_v, j_{!*}\mathcal{L}) \to \mathbb{H}^i(X_v\cap H, j_{!*}\mathcal{L})$ sont injectifs pour $i=-2$ et des isomorphismes pour $i<-2$.

iii) Le morphisme induit $\rho' : \mathcal{L}^i_v \to \mathcal{L}(H)^i_v$ est un isomorphisme pour $i<0$ et par dualité $G' : \mathcal{L}(H)^i_v \to \mathcal{L}^{i+2}_v$ est un isomorphisme pour $i>0$.

Preuve. On utilise le théorème d'annulation d'Artin-Lefschetz sur l'espace affine $X_v - X_v\cap H$ pour démontrer i) qui est dual de ii).

Preuve de (iii). On pose $K = Rf_*j_{!*}\mathcal{L}$ et $K(H) = R(f_{|H})_*(j_{!*}\mathcal{L}_{|H})$. Vue la remarque (1), on introduit les morphismes δ_{i-1} sur X et $\delta_{i-1}(H)$ sur H (théorème 1.1) dans le diagramme formé par les suites exactes :

(2*) $\quad H^{i-1}(i_v^* R(k_v)_* K_{|V-\{v\}}) \xrightarrow{\delta_{i-1}} \mathbb{H}_v^i(V, K) \xrightarrow{I_v^i} \mathbb{H}^i(X_v, j_{!*}\mathcal{L})$ et

(3*) $\quad H^{i-1}(i_v^* R(k_v)_* K(H)_{|V-\{v\}}) \xrightarrow{\delta_{i-1}(H)} \mathbb{H}_v^i(V, K(H)) \xrightarrow{I_v^i} \mathbb{H}^i(i_v^* K(H))$

où $\mathbb{H}^i_{X_v}(X, j_{!*}\mathcal{L}) \simeq \mathbb{H}_v^i(V, K)$, $\mathbb{H}^i(X_v, j_{!*}\mathcal{L}) \simeq \mathbb{H}^i(i_v^* K)$, $\mathbb{H}^i_{X_v \cap H}(H, j_{!*}\mathcal{L}) \simeq \mathbb{H}_v^i(V, K(H))$, $\mathbb{H}^i(X_v \cap H, j_{!*}\mathcal{L}) \simeq \mathbb{H}^i(i_v^* K(H))$.

Des morphismes $(\rho_v, \rho^!, \rho^*)$sont définis de la suite (2*) dans la suite (3*). Pour établir l'isomorphisme $\rho' : \mathcal{L}_v^i \simeq \mathcal{L}(H)_v^i$ dans la suite (*), et étant donné que $\rho^!$ est un isomorphisme pour $i < 0$, il suffit de prouver que le morphisme $ker\, I_v^i \simeq ker\, I_v^i(H)$ induit par $\rho^!$ est aussi un isomorphisme, soit : $Im\, \delta_{i-1} \simeq Im\, \delta_{i-1}(H)$; or on a d'après la remarque précédente (1) :

$Im\, \delta_{i-1} = Im\, (\oplus_{0<l\leq n, j<i}^{S_l \subset V_l^*} H^{i-1-j}(i_v^* R k_{v*} k_v^* i_{S_l\,!*} \mathcal{L}_l^j[l]))$ et

$Im\, \delta_{i-1}(H) = Im(\oplus_{0<l\leq n, j<i}^{S_l \subset V_l^*} H^{i-1-j}(i_v^* R(k_v)_* k_v^* i_{S_l\,!*} (\mathcal{L}_{|H})_l^j[l]))$

Pour comparer les faisceaux $\mathcal{L}_l^j$ et $(\mathcal{L}_{|H})_l^j$, on considère un point u_l d'une strate S_l de dimension l, une section N_{u_l} normale à S_l au point u_l, le sous-espace $X_{N_{u_l}} := f^{-1}(N_{u_l})$ qui est lisse et $X_{u_l} := f^{-1}(u_l)$ qui est un DCN dans $X_{N_{u_l}}$, alors on a : $(R^{-l+j} f_*(i_{X_l})^! j_{!*}\mathcal{L})_{u_l} \simeq \mathbb{H}^{-l+j}_{X_{u_l}}(X_{N_{u_l}}, j_{!*}\mathcal{L}) \simeq \mathbb{H}^{j}_{X_{u_l}}(X_{N_{u_l}}, j_{!*}\mathcal{L}[-l])$ où la restriction de $j_{!*}\mathcal{L}[-l]$ à $X_{N_{u_l}}$ est un faisceau pervers car $X_{N_{u_l}}$ est de codimension l par transversalité. Comme $i < 0$ et $j < i$ on a $j < -1$ et le théorème d'annulation d'Artin sur l'espace affine $X_{u_l} - (H \cap X_{u_l})$ s'applique. On déduit l'isomorphisme : $R^{-l+j} f_*({i_{X_l}}^! j_{!*}\mathcal{L}) \simeq R^{-l+j} f_*(({i_{(H\cap X_l)}})^! j_{!*}\mathcal{L}_{|H})$ des deux termes pris avant la restriction à H à gauche et après la restriction à H à droite.

En particulier le raisonnement s'applique aussi sur une strate générique S_n. En effet $X_n := f^{-1}(S_n)$ est ouvert, et en tout point u, l'espace $X_u := f^{-1}(u)$ est lisse, on a :

$(R^{-n+j} f_*(i_{X_n})^! j_{!*}\mathcal{L})_u = (R^{-n+j} f_*(i_{X_n})^* j_{!*}\mathcal{L})_u \simeq \mathbb{H}^{-n+j}(X_u, j_{!*}\mathcal{L})$

où $\mathbb{H}^{-n+j}(X_u, j_{!*}\mathcal{L}) = \mathbb{H}^{m-n+j}(X_u, \tilde{\mathcal{L}})$ est isomorphe à $\mathbb{H}^{-n+j}(X_u, \tilde{\mathcal{L}}) = \mathbb{H}^{m-n+j}(X_u \cap H, j_{!*}\mathcal{L})$ par le théorème sur la section hyperplane de Lefschetz car X_u est de dimension $m - n$ et $j < -1$. Donc $\rho^!$ qui est un isomorphisme, induit aussi des isomorphismes de $Im\, \delta_{i-1} = ker\, I_v^i$ sur $Im\, \delta_{i-1}(H) = ker\, I_v^i(H)$. Les suites étant exactes, il induit alors des isomorphismes ρ' pour $i > 0$ (et par dualité des isomorphismes G') dans le diagramme suivant : $\eta^i : \mathcal{L}_v^{-i} \overset{\rho'}{\simeq} \mathcal{L}(H)_v^{-i} \simeq (\mathcal{L}_{|H})_v^{-i+1} \overset{\eta^{i-1}}{\simeq} (\mathcal{L}_{|H})_v^{i-1} \simeq \mathcal{L}(H)_v^{i-2} \overset{G'}{\simeq} \mathcal{L}_v^i$ où l'on suppose η^{i-1} un isomorphisme par un raisonnement de récurrence ; ce qui termine la preuve du lemme, et celle du théorème.

Références

[1] Beilinson A.A., Bernstein J., Deligne P. Faisceaux Pervers, *Analyse et Topologie sur les espaces singuliers Vol.I, Astérisque* **100**(1982).

[2] E. Cattani, F. El Zein, P. A. Griffiths, D. T. Lê : Hodge theory, *Princeton University Press*, (2014).

[3] Deligne P. Théorèmes de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales, *Publ. Math. IHES*, 35 (1968), 107-126.

[4] Deligne P. Décompositions dans la catégorie Dérivée, Motives (Seattle, WA, 1991), 115128, Proc. Symp. Pure Math., 55, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[5] Deligne P., Gabber O. Théorème de pureté d'après Gabber, *Note written by Deligne and distributed at IHES* (1981).

[6] El Zein F., Lê Dũng Tráng. Du théorème de décomposition à la Pureté locale, *C.R.Acad.Sci. Paris, Ser. I*, à paraître.

[7] F. El Zein, X. Ye : Filtration perverse et théorie de Hodge, *C.R.Acad.Sci. Paris, Ser. I*, à paraître.

[8] Saito M. Modules de Hodge polarisables, *Publ. RIMS, Kyoto univ.*, 24 (1988), 849-995. (2) Mixed Hodge Modules. 26 (1990), 221-333.